Capitolo 5

Logica

92. Un macchinario produce bulloni. Un bullone è ritenuto difettoso quando ha peso oppure dimensioni sbagliate. Il controllo di qualità mette in evidenza che il 5% dei bulloni prodotti ha almeno il peso sbagliato e che il 3% ha almeno le dimensioni sbagliate. Nell'ipotesi che il 2% dei bulloni prodotti abbia sia peso che dimensioni sbagliate, qual è in totale la percentuale di bulloni difettosi che produce quel macchinario?

A. 8%

B. 10%

C. 6%

D. 4%

E. Non è possibile rispondere con i dati assegnati

Logica e statistica; percentuali.

Un bullone è difettoso quando ha il *solo peso* sbagliato (chiamiamolo bullone di tipo P) oppure la *sola dimensione* sbagliata (bullone di tipo di D) oppure *sia peso sia dimensione* sbagliate (bullone di tipo $P\&D$).

Ora supponiamo (tanto per tradurre le percentuali in numeri assoluti) che i bulloni siano 100 in tutto; allora, in base ai dati del problema, è $P\&D = 2$ (su 100 bulloni, 2 hanno entrambi i difetti), $P = 5 - 2 = 3$ (su 100 bulloni, 5 hanno "almeno" il peso sbagliato: di questi, però, sappiamo che 2 hanno anche la dimensione sbagliata perché hanno entrambi i difetti) e $D = 3 - 2 = 1$ (su 100 bulloni, 3 hanno "almeno" la dimensione sbagliata: di questi, però, 2 hanno anche il peso sbagliato perché hanno entrambi i difetti). In conclusione, i bulloni difettosi sono $P + D + P\&D = 3 + 1 + 2 = 6$ e la risposta esatta è la C.

⚓ *Conteggio di oggetti classificati secondo due criteri; percentuali.*

---

93. Si considerino le due definizioni seguenti:

c. Una circonferenza c è l'insieme dei punti del piano equidistanti da un fissato punto C.

p. Una parabola p è l'insieme dei punti del piano equidistanti da un fissato punto F e da una fissata retta d.

Allora

A. la distanza di un punto qualunque di c da C è uguale alla distanza di un punto qualunque di p da F

B. tre punti distinti di c hanno la stessa distanza da C e tre punti distinti di p hanno la stessa distanza da d

C. un punto di c ha la stessa distanza da C di un punto di p

D. due punti di c hanno la stessa distanza da C e un punto di p ha distanza da F uguale alla distanza che ha da d

E. due punti di c hanno la stessa distanza da C e tre punti distinti di p hanno la stessa distanza da F

👁 *Logica e geometria sintetica piana.*

✎ Leggiamo le risposte alla luce delle definizioni date. Una prima osservazione logica è la seguente. Le due definizioni date sono totalmente indipendenti tra loro: i simboli c, p indicano in questo contesto la *generica* circonferenza e la *generica* parabola (non due *particolari* curve). Quindi ogni risposta che stabilisca una relazione quantitativa tra c e p è sicuramente sbagliata. Sono di questo tipo (e quindi sbagliate) le risposte A e C. Le altre tre risposte (B, D, E) contengono invece un'affermazione su c e un'affermazione su p, indipendenti tra loro. L'affermazione sulla circonferenza è vera in ciascuna di queste tre risposte. L'affermazione fatta su p, invece, è quella che permette di discernere la risposta esatta:

B afferma che "tre punti distinti di p hanno la stessa distanza da d";

D afferma che "un punto di p ha distanza da F uguale alla distanza che ha da d";

E afferma che "tre punti distinti di p hanno la stessa distanza da F".

Ci si rende conto subito che la sola in accordo con la definizione di parabola è la D. Quindi la risposta esatta è D.

Più che un quesito di geometria, è in realtà un esercizio di "deduzioni logiche da definizioni matematiche"; naturalmente aiuta sapere di cosa si sta parlando, quindi: definizione metrica di circonferenza e parabola.

---

94. Aldo, Bruno e Carlo sono tre amici. Si sa che

- almeno uno di essi è laureato
- se Aldo è laureato, anche Bruno lo è
- se Carlo è laureato, anche Aldo lo è
- solo uno tra Bruno e Carlo è laureato

Allora si deduce che

A. Aldo e Bruno sono laureati

B. Bruno è laureato

C. Aldo è laureato e Bruno non lo è

D. Carlo è laureato

E. i laureati sono due

Logica; deduzioni.

✎ Per non perdere il filo del ragionamento, conviene elencare sistematicamente le situazioni possibili (sono poche!). Indicando Aldo, Bruno e Carlo con le lettere A, B, C, rispettivamente, è possibile che i laureati siano

caso 1: nessuno

caso 2: A

caso 3: B

caso 4: C

caso 5: A, B

caso 6: A, C

caso 7: B, C

caso 8: A, B, C

Passiamo ora in rassegna le quattro informazioni che fornisce il quesito, e chiediamoci quali casi ciascuna di esse porta ad *escludere*. Si vede che

con la prima informazione ("almeno uno di essi è laureato") escludiamo il caso 1;

con la seconda informazione ("se Aldo è laureato, anche Bruno lo è") escludiamo anche i casi 2, 6;

con la terza informazione ("se Carlo è laureato, anche Aldo lo è") escludiamo anche i casi 4, 7;

con la quarta informazione ("solo uno tra Bruno e Carlo è laureato") escludiamo anche il caso 8.

Rimangono i casi 3 e 5, il che significa

> "è laureato solo Bruno, oppure sono laureati sia Bruno sia Carlo (ma non Aldo)"

Inoltre, per come abbiamo ragionato, *questo è tutto ciò che si può dedurre* dalle informazioni di partenza. Il quesito chiede appunto cosa si può dedurre (necessariamente) dalle premesse; scorrendo le risposte proposte, si vede che quella esatta è la B: Bruno è laureato. Questo infatti è sicuramente vero.

☞ Le risposte A e C sono sicuramente false, in base alle premesse, mentre le risposte D ed E *possono* essere vere, ma non lo sono *necessariamente*, e quindi, per come è formulato il quesito, non sono esatte.

⚓ *Deduzioni ed esclusioni in situazioni con un numero finito di possibilità.*

---

95. L'affermazione

A nessuno studente sono antipatici tutti i professori

equivale a dire che

A. c'è uno studente a cui tutti i professori sono antipatici

B. tutti i professori sono antipatici a tutti gli studenti

C. a qualche studente sono simpatici tutti i professori

D. ad ogni studente è simpatico almeno un professore

E. c'è un professore che è simpatico a tutti gli studenti

Logica; negazione di una proposizione.

In generale, affermare che

"*Nessun* x *ha* la tale proprietà"

equivale ad affermare che

"*Ogni* x *non ha* la tale proprietà"

Quindi la frase "*A nessuno* studente *sono* antipatici tutti i professori" significa "*Ad ogni* studente *non sono* antipatici tutti i professori". A sua volta, dire "... non sono antipatici tutti" significa, in positivo, dire "... è simpatico almeno uno", quindi la frase di partenza è equivalente a "Ad ogni studente è simpatico almeno un professore", che è la D.

La risposta esatta è dunque la D.

Negazione di una proposizione contenente i quantificatori "per ogni" ed "esiste".

---

96. L'affermazione

Non c'è grattacielo senza ascensore

significa

A. nessun grattacielo ha due ascensori

B. ogni grattacielo ha almeno un ascensore

C. ogni grattacielo ha due ascensori

D. qualche grattacielo non ha ascensore

E. qualche grattacielo ha almeno un ascensore

👁 *Logica; negazione di una proposizione.*

✎ In generale, affermare che

"*Non esiste x senza* la tale proprietà"

equivale ad affermare che

"*Ogni x non è senza* la tale proprietà"

ossia (due negazioni affermano)

"*Ogni x ha* la tale proprietà"

Quindi "Non c'è grattacielo senza ascensore" significa "Ogni grattacielo ha l'ascensore", o più precisamente la B: "Ogni grattacielo ha almeno un ascensore".

La risposta esatta è dunque la B.

⚓ *Negazione di una proposizione contenente il quantificatore "esiste".*

---

97. Su un tavolo sono sparsi alcuni gettoni. Si sa che metà di essi sono quadrati e metà rotondi; metà sono rossi e metà blu. Allora si può dedurre che

A. il numero di gettoni quadrati blu è uguale al numero di gettoni rotondi rossi

B. i quattro tipi di gettoni sono in numero uguale

C. il numero di gettoni è divisibile per quattro

D. il numero di gettoni quadrati blu è uguale al numero di gettoni quadrati rossi

E. il numero di gettoni rotondi rossi è uguale al numero di gettoni quadrati rossi

Logica e statistica.

I gettoni si possono classificare rispetto a due criteri indipendenti: il colore e la forma. Questo tipo di classificazione tipicamente si fa con una "tabella a doppia entrata". Supponiamo, tanto per fissare le idee, che i gettoni siano 100 (ma il ragionamento che segue rimane valido qualunque sia il numero totale N dei gettoni, che è evidentemente pari ma per il resto incognito), e costruiamo una tabella del tipo

	quadrati	rotondi	totale
rossi	?	?	50
blu	?	?	50
totale	50	50	100

I totali parziali di riga e colonna (pari a 50) tengono conto dell'informazione "Si sa che metà di essi sono quadrati e metà rotondi; metà sono rossi e metà blu". Se ora proviamo a scrivere ad esempio nella casella "quadrati e rossi" un numero n, ci accorgiamo che questo, per le condizioni che abbiamo sui totali di riga e colonna, determina tutti gli altri valori, al modo seguente

	quadrati	rotondi	totale
rossi	n	$50-n$	50
blu	$50-n$	n	50
totale	50	50	100

Scopriamo così che, in ogni caso,

i gettoni quadrati rossi sono tanti quanti i rotondi blu;
i gettoni quadrati blu sono tanti quanti i rotondi rossi.

Quest'ultima affermazione è esattamente la A. Pertanto la risposta esatta è la A.

Per *particolari* scelte di N ed n, qualcuna delle risposte B, C, D, E *potrebbe* essere vera, ma come si è visto l'unica risposta che *si deduce necessariamente* dalle premesse è la A.

☞ Anche se il quesito non richiede, per rispondervi, alcuna conoscenza specifica di statistica, l'abbiamo classificato come "logica e statistica" perché l'idea di costruire una tabella a doppia entrata, e ragionarvi sopra come abbiamo fatto, è senz'altro più naturale per chi abbia un po' di dimestichezza con la statistica elementare.

⚓ *Ragionamenti su "tabelle a doppia entrata".*

---

98. Nello scorso campionato di calcio il 60% dei rigori concessi è stato a favore della squadra di casa e il restante 40% a favore della squadra ospite. Si è constatato che l'80% dei rigori tirati dalla squadra di casa è andato a segno, mentre solo il 75% di quelli tirati dalla squadra ospite ha avuto successo. Qual è stata la percentuale complessiva dei rigori segnati?

A. Minore del 75%

B. Del 77%

C. Del 78%

D. Del 77,5%

E. Maggiore dell'80

👁 *Logica e statistica; percentuali.*

✎ Classifichiamo la totalità dei rigori assegnati (posta uguale a 100, in modo che valori assoluti e percentuali assolute coincidano) secondo i due criteri: assegnati alla squadra di casa o ospite, andati a segno o no. I dati del problema sono:

totale rigori assegnati alla squadra di casa: 60;

totale rigori assegnati alla squadra ospite: 40;

rigori assegnati alla squadra di casa e andati a segno: l'80% di 60, cioè 48;

rigori assegnati alla squadra ospite e andati a segno: il 75% di 40, cioè 30.

Sommando questi ultimi due numeri (rigori assegnati alla squadra di casa e andati a segno e rigori assegnati alla squadra ospite e andati a segno) otteniamo la totalità dei rigori andati a segno: $48 + 30 = 78$. La risposta esatta è quindi la C.

Si noti come abbiamo tradotto *percentuali relative* in *percentuali assolute*, ad esempio: l'80% del 60% è il 48%.

Classificazione di oggetti secondo due criteri; percentuali assolute e relative.

---

99. Fra tre anni Aldo avrà il doppio dell'età che Sara aveva tre anni fa, mentre ora il quadruplo degli anni di lui è pari al quintuplo degli anni di lei. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. Si può dedurre che Sara è più vecchia di Aldo

B. Per conoscere le età di Sara e di Aldo ci vuole un ulteriore dato

C. I due hanno la stessa età

D. Fra un anno Sara avrà tanti anni quanti ne aveva Aldo un anno fa

E. Si possono dedurre le età di Sara e di Aldo

Logica e algebra; problemi esprimibili con sistemi di equazioni.

Siano s ed a, rispettivamente, le età di Sara e Aldo oggi. I dati del problema si traducono allora nelle equazioni

$$\begin{cases} 3 + a = 2\,(s - 3) \\ 4a = 5s \end{cases}$$

Ricavando dalla seconda equazione $a = 5s/4$ e sostituendo nella prima, si ottiene

$$\begin{aligned} 3 + \frac{5}{4}s &= 2s - 6 \\ \frac{3}{4}s &= 9 \\ s &= 12 \end{aligned}$$

e quindi anche

$$a = \frac{5}{4} \times 12 = 15$$

Abbiamo quindi calcolato le due età. Perciò la risposta E è esatta (e la B sicuramente falsa).

Si può controllare che ciascuna delle altre affermazioni A, C, D è effettivamente falsa.

⚓ *Capacità di tradurre condizioni formulate a parole in equazioni; sistemi di due equazioni in due incognite.*

---

100. Una scatola contiene 10 cubi. Ogni faccia di ciascun cubo è colorata di verde oppure di bianco oppure di rosso. In totale, 6 cubi hanno almeno una faccia verde, 7 hanno almeno una faccia bianca e 9 hanno almeno una faccia rossa; inoltre, nessuno dei 10 cubi ha tutte le facce dello stesso colore. Quanti cubi nella scatola hanno facce di tutti e tre i colori?

A. Nove

B. Due

C. Nessuno

D. Otto

E. Uno

👁 *Logica; deduzioni.*

✎ Abbreviamo Bianco, Rosso, Verde con B, R, V, rispettivamente. Numeriamo i cubi da 1 a 10; 9 di essi hanno almeno una faccia R, possiamo supporre che siano i primi 9; il decimo, non avendo una faccia R, avrà certamente almeno una faccia V e una B (altrimenti avrebbe le 3 facce dello stesso colore). Rappresentiamo la situazione con questa tabella

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	R	R	R	R	R	R	R	R	
									B
									V

Proseguiamo chiedendoci ora quali sono i 7 cubi con una faccia B. Uno l'abbiamo già "sistemato": è il decimo; gli altri 6 possiamo supporre che siano i primi 6. La situazione è allora

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	R	R	R	R	R	R	R	R	
B	B	B	B	B	B				B
									V

Abbiamo così “sistemato” i cubi che hanno almeno una faccia R e quelli che hanno almeno una faccia B. Occupiamoci ora di quelli con almeno una faccia V: sono 6 in tutto, e di questi: uno è il numero 10; tre sono necessariamente i numeri 7, 8, 9, altrimenti questi avrebbero tutte le facce R, il che è proibito. Dunque siamo arrivati a

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	R	R	R	R	R	R	R	R	
B	B	B	B	B	B				B
						V	V	V	V

Restano da sistemare gli ultimi due cubi con almeno una faccia V; questi saranno due qualsiasi tra i numeri da 1 a 6, e questi due risulteranno quindi avere facce di tutti e tre i colori. Quindi sono 2 i cubi con facce di tutti e tre i colori.

La risposta esatta è quindi la B.

Deduzioni ed esclusioni in situazioni con un numero finito di possibilità.

---

101. Sapendo che l’affermazione

Tutti i sabati vado in pizzeria e poi al cinema

è *falsa*, se ne deduce che

A. qualche sabato non vado in pizzeria o al cinema

B. tutti i sabati non vado in pizzeria o al cinema

C. qualche sabato non vado né in pizzeria né al cinema

D. tutti i sabati non vado né in pizzeria né al cinema

E. tutti i giorni vado in pizzeria e al cinema

Logica; negazione di una proposizione.

Dire che la frase proposta è falsa significa che

"Qualche sabato (= almeno un sabato) *non accade* che io vada in pizzeria e poi al cinema"

A sua volta, *negare* "io vado in pizzeria *e* al cinema" significa *affermare* che

"Non vado in pizzeria *oppure* non vado al cinema"

In definitiva, la negazione della frase di partenza è

"Qualche sabato non vado in pizzeria oppure non vado al cinema"

Quindi la risposta esatta è la A.

⚓ *Negazione di una proposizione contenente il quantificatore "per ogni" ed il connettivo "e".*

---

102. In una città sono pubblicati tre giornali: *il Mattino*, *il Pomeriggio* e *la Sera*. Il 40% dei cittadini legge il *Mattino*, il 30% legge il *Pomeriggio* e il 10% legge la *Sera*. Inoltre, il 15% dei cittadini legge sia il *Mattino* che il *Pomeriggio*, il 7% sia il *Mattino* che la *Sera* e il 5% sia il *Pomeriggio* che la *Sera*. Infine, il 2% dei cittadini legge tutti e tre i giornali. Qual è la percentuale di cittadini che non legge alcun giornale?

A. 1%

B. 20%

C. 45%

D. 50%

E. 60%

👁 *Logica; e statistica; percentuali.*

✎ Anzitutto, occorre capire bene il significato dei dati. Ad es., quando si dice che

"il 40% dei cittadini legge il *Mattino*"

questa frase va correttamente interpretata come "il 40% dei cittadini legge almeno il *Mattino*"

quindi il dato 40% comprende 4 categorie di persone: chi legge solo il *Mattino*, chi legge il *Mattino* e il *Pomeriggio* (ma non la *Sera*), chi legge il *Mattino* e la *Sera* (ma non il *Pomeriggio*) e infine chi li legge tutti e tre. Analogo discorso vale per tutti gli altri dati.

Detto questo, ripartiamo la totalità dei cittadini che *legge almeno un giornale* in 7 categorie:

M = chi legge solo il *Mattino*;

P = chi legge solo il *Pomeriggio*;

S = chi legge solo la *Sera*;

MP = chi legge *Mattino* e *Pomeriggio* (ma non la *Sera*);

MS = chi legge *Mattino* e *Sera* (ma non il *Pomeriggio*);

PS = chi legge *Pomeriggio* e *Sera* (ma non il *Mattino*);

MPS = chi legge *Mattino*, *Pomeriggio* e *Sera*.

Poi, per semplificare i conteggi, supponiamo che i cittadini siano 100, in modo che percentuali e valori assoluti coincidano. Allora dai dati del problema si ha $MPS = 2$. Inoltre

$$\begin{aligned} 15 &= MP + MPS = MP + 2 \\ 7 &= MS + MPS = MS + 2 \\ 5 &= PS + MPS = PS + 2 \end{aligned}$$

da cui $MP = 13$, $MS = 5$ e $PS = 3$. Infine

$$\begin{aligned} 40 &= M + MP + MS + MPS = M + 13 + 5 + 2 \\ 30 &= P + MP + PS = P + 13 + 3 + 2 \\ 10 &= S + MS + PS + MPS = S + 5 + 3 + 2 \end{aligned}$$

da cui $M = 20$, $P = 12$ e $S = 0$. Sommando ora tutti i numeri otteniamo

$$M + P + S + MP + MS + PS + MPS = 20 + 12 + 0 + 13 + 5 + 3 + 2 = 55$$

quindi il 55% dei cittadini legge almeno un giornale, e per differenza il 45% dei cittadini non legge alcun giornale. La risposta esatta quindi è la C.

Conteggio di oggetti classificati secondo tre criteri; percentuali. ⚓

---

103. L'affermazione

Domani Aldo verrà dimesso dall'ospedale se oggi rimane senza febbre

equivale a una delle seguenti. Quale?

A. Se domani verrà dimesso, vuol dire che oggi Aldo è senza febbre

B. Per essere dimesso domani, è necessario che oggi Aldo rimanga senza febbre

C. Per essere dimesso domani, è sufficiente che oggi Aldo rimanga senza febbre

D. Domani Aldo verrà dimesso solo se oggi rimane senza febbre

E. Oggi Aldo ha la febbre e domani non verrà dimesso

Logica; implicazioni tra proposizioni.

Definendo le proposizioni

$$a = \text{“}\textit{Domani Aldo verrà dimesso dall'ospedale}\text{”}$$
$$b = \text{“}\textit{oggi Aldo rimane senza febbre}\text{”}$$

la frase proposta ha una forma del tipo: vale (accadrà) a se vale (si verifica) b, ossia la condizione (ipotesi, causa) b *implica* la condizione (tesi, effetto) a. Si può utilmente schematizzare una frase di questa forma mediante il simbolo $\Rightarrow$ (detto "di implicazione")

$$b \Rightarrow a$$

Ora leggiamo le varie risposte ad una ad una e cerchiamo di capire se esprimono lo stesso concetto dell'affermazione di partenza.

A. È del tipo "se *per ipotesi* vale a, allora ne consegue b", ossia $a \Rightarrow b$. Questa affermazione è l'inversa di quella iniziale, e perciò la A è sbagliata.

B. Esprime il concetto che b deve verificarsi perché possa valere a: in altri termini, se io *per ipotesi* "vedessi" a, allora dovrei "vedere" anche b, quindi $a \Rightarrow b$. Anche questa risposta è sbagliata.

C. Esprime il fatto che il verificarsi di b basta perché valga a: quindi, se io *per ipotesi* "vedessi" b, allora di sicuro "vedrei" anche a, ossia $b \Rightarrow a$. Questa è la risposta corretta.

D. Il fatto che b si verifica solo se si verifica a vuol dire che b è necessario perché valga a, quindi la D è come la B.

E. Se oggi Aldo ha la febbre, cosa si può dedurre dall'affermazione iniziale ("se oggi Aldo non ha la febbre, è sicuro che domani verrà dimesso") circa le dimissioni dall'ospedale? La risposta è: non si deduce nulla, ovvero: domani Aldo potrebbe essere dimesso oppure no. Pertanto anche la E è sbagliata.

La risposta esatta è quindi la C.

La soluzione del quesito si semplifica se si tiene presente che un'implicazione $p \Rightarrow q$ può *sempre* essere espressa verbalmente con una qualsiasi delle seguenti locuzioni:

"condizione sufficiente per q è p"

"condizione necessaria per p è q"

"q vale se vale p"

"p vale solo se vale q".

Implicazione tra proposizioni; uso delle locuzioni "condizione necessaria" e "condizione sufficiente" e delle locuzioni "se" e "solo se".

---

104. Dalla proposizione

Una successione di numeri reali, se crescente e limitata, è convergente

si deduce che

A. la convergenza è una condizione necessaria per la limitatezza di una successione reale

B. la convergenza è una condizione necessaria per la crescenza di una successione reale

C. le condizioni di crescenza e di limitatezza sono sufficienti per la convergenza di una successione reale

D. le condizioni di crescenza e di limitatezza sono necessarie e sufficienti per la convergenza di una successione reale

E. esistono successioni reali convergenti

Logica; implicazioni tra proposizioni.

✎ Per brevità, chiamiamo p la proposizione di partenza ed s una successione di numeri reali. Allora p si può schematizzare così, sotto forma di implicazione (rimandiamo al commento del quesito n° 103 per la spiegazione del legame tra "implicazione" e le locuzioni "condizione necessaria" e "condizione sufficiente"):

$$\text{per ogni } s, \ (s \text{ crescente e limitata} \Rightarrow s \text{ convergente})$$

Riformuliamo in modo analogo le affermazioni proposte dalla varie risposte.

A. Per ogni s, (s limitata $\Rightarrow$ s convergente)

B. Per ogni s, (s crescente $\Rightarrow$ s convergente)

C. Per ogni s, (s crescente e limitata $\Rightarrow$ s convergente)

D. Per ogni s, (s crescente e limitata $\Leftrightarrow$ s convergente)

E. Esiste una s tale che s è convergente

Si vede subito che la C dice la stessa cosa della p, e quindi C è la risposta esatta.

☞ Le affermazioni A e B pretendono di concludere la tesi sotto una sola ipotesi anziché due, perciò non sono conseguenza di p; D pretende di dedurre anche l'implicazione inversa, che non è affermata dalla p; la E seguirebbe dalla p se sapessimo già che esistono successioni crescenti e limitate, cosa che la p stessa non consente di affermare.

⚓ *Implicazione tra proposizioni; uso delle locuzioni "condizione necessaria" e "condizione sufficiente".*

---

105. In un cubo due vertici si dicono *opposti* se il segmento che li congiunge passa per il centro del cubo. Quale delle seguenti proprietà caratterizza i vertici opposti di un cubo?

A. Nessuna faccia li contiene entrambi

B. Nessuno spigolo li contiene entrambi

C. Nell'insieme delle distanze tra le coppie di vertici, la loro distanza è minima

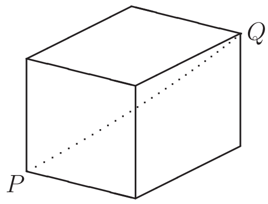
D. Esistono due facce distinte che li contengono

E. Sono equidistanti dal centro del cubo

Logica e geometria sintetica dello spazio; equivalenze logiche.

Dire che una proprietà *caratterizza* i vertici opposti del cubo significa: se i vertici sono opposti allora vale la proprietà e, viceversa, se vale la proprietà allora i vertici sono opposti.

Cominciamo a supporre che i vertici siano opposti, come P e Q in figura.



Si riconosce subito che

vale la A (nessuna faccia li contiene entrambi);

vale la B (nessuno spigolo li contiene entrambi);

non vale la C (nell'insieme delle distanze tra le coppie di vertici, la distanza tra vertici opposti è *massima*, non minima);

vale la D (esistono due facce distinte che li contengono);

vale la E (i vertici sono equidistanti dal centro del cubo).

Scartiamo quindi la risposta C. Dobbiamo ora chiederci, per ciascuna delle proprietà A, B, D, E, se la proprietà implichi il fatto che i due vertici sono opposti. Ragioniamo così: pensiamo di fissare un vertice P del cubo, supponiamo che la proprietà valga per due vertici P, Q, e vediamo se si può *dedurre* che Q è il vertice opposto di P.

Supponiamo che valga la A: nessuna faccia contiene P e Q. Il vertice P è contenuto in 3 facce, che complessivamente contengono tutti gli altri vertici tranne il vertice opposto a P. Questo significa che, se Q non è opposto, certamente esiste una faccia che contiene P e Q, e quindi se nessuna faccia li contiene entrambi allora i vertici sono opposti. Perciò la risposta esatta è la A.

Passiamo comunque in rassegna anche B, D, E (la risposta esatta avrebbe potuto non essere elencata per prima).

Supponiamo che valga la B: nessuno spigolo contiene P e Q. Il vertice P è contenuto in 3 spigoli, che complessivamente contengono 4 vertici (su 8 che ha il cubo), quindi Q può essere uno qualsiasi degli *altri* 4 vertici, non necessariamente quello opposto a P. Perciò la B non è la risposta esatta.

Supponiamo che valga la D: esistono due facce distinte che contengono P e Q. Scegliamo una faccia f_1 che contiene P; scegliamo ora una faccia f_2 diversa da questa; poiché f_2 ha

4 vertici e Q può essere uno qualsiasi di questi (tranne eventualmente P stesso), Q non è necessariamente opposto a P. Perciò anche D non è la risposta esatta.

Supponiamo che valga la E: P e Q sono equidistanti dal centro del cubo. Ma questo è vero comunque si scelgano i due vertici (per la simmetria che ha il cubo), quindi non implica che Q sia opposto a P, e neanche la D è la risposta esatta.

⚓ *Concetto di proprietà equivalenti; terminologia e considerazioni elementari su vertici, spigoli e facce del cubo.*

---

106. Indicate con p e q due generiche condizioni, quattro delle seguenti affermazioni sono fra loro logicamente equivalenti, mentre una non lo è con le altre. Quale?

A. Può verificarsi p solo se q è verificata

B. È sufficiente che si verifichi p perché ne segua q

C. È necessario che si verifichi q perché si possa verificare p

D. p implica q

E. p segue dal verificarsi di q

👁 *Logica; implicazioni tra proposizioni.*

✎ Riformuliamo ciascuna affermazione usando il simbolo $\Rightarrow$ di implicazione.

(Si veda, in proposito, quanto osservato nel quesito n° 103 sull'uso delle varie locuzioni logiche.)

A. $p \Rightarrow q$

B. $p \Rightarrow q$

C. $p \Rightarrow q$

D. $p \Rightarrow q$

E. $q \Rightarrow p$

Poiché la domanda chiedeva quale delle affermazioni non è equivalente alle altre quattro, la risposta da dare è la E.

Implicazione tra proposizioni; uso delle locuzioni "condizione necessaria" e "condizione sufficiente"e delle locuzioni "se" e "solo se".

---

107. Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

Affinché due frazioni siano uguali

A. è sufficiente che abbiano lo stesso numeratore e lo stesso denominatore

B. è necessario che abbiano numeratori e denominatori proporzionali

C. è necessario che abbiano uguale numeratore e uguale denominatore

D. non è necessario che abbiano uguale numeratore e uguale denominatore

E. è necessario e sufficiente che abbiano numeratori e denominatori proporzionali

Logica e aritmetica; frazioni.

Ricordiamo che l'uguaglianza tra due frazioni

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

($a, b \neq 0, c, d \neq 0$ numeri interi) si realizza non solo quando $a = c$ e $b = d$, ma più in generale quando $a = kc$ e $b = kd$ per qualche intero $k \neq 0$. Infatti in tal caso k si semplifica e si ha

$$\frac{a}{b} = \frac{kc}{kd} = \frac{c}{d}$$

Le uguaglianze $a = kc$ e $b = kd$ significano che le frazioni hanno numeratori e denominatori proporzionali. Si riconosce quindi che le affermazioni A, B, D, E sono tutte vere (attenzione a ragionare bene sulle locuzioni "condizione necessaria" e "condizione sufficiente"!), mentre la C è falsa, come mostra l'esempio $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, in cui $1 \neq 3$ e $2 \neq 6$.

Poiché la domanda chiedeva appunto quale delle affermazioni è falsa, la risposta da dare è la C.

Proprietà delle frazioni; uso delle locuzioni "condizione necessaria" e "condizione sufficiente".
